



# Karmaşık Sayılar

$a \in \mathbb{R}$  olmak üzere,

$Z = a + bi$  sayısı hem imajiner (sanal) hemde gerçel (reel) sayıdan oluştuğundan ötürü karmaşık sayıdır.

Reel kısmı  $a$  sayıdır ve  $\text{Re}(z) = a$  olarak gösterilir.

İmajiner kısmı  $b$  sayıdır ve  $\text{Im}(z) = b$  olarak gösterilir. Yani  $i$  sayısının katsayısı imajiner kısmı ifade eder.

Karmaşık sayılarda bir sayı tanımlandığında genelde  $Z$  harfi ile gösterilir.



$a^2 + 1 = 0$  denkleminde  $a$  yı bulmak için  $a^2 = -1$  olur. Gerçel sayılarda böyle bir  $a$  değeri bu işlemi sağlamaz. Gerçel olmayan sanal bir sayı tanımlanmış ve bu da " $i$ " olarak tanımlanmıştır.

$i^2 = -1$  olarak matematikte yeni bir devrim başlamıştır. Bu sanal sayılarda kare başta olmak üzere çift dereceli kuvvetlerin – olması mümkün olmuştur. Sanal ve gerçel kısım ikisi karmaşık sayı kümesini oluşturur.

Aşağıdaki karmaşık sayıların reel ve imajiner kısımlarını bulunuz.

| Z Sayısı        | Re (Z) | Im (Z) |
|-----------------|--------|--------|
| $b + 3i$        |        |        |
| 4               |        |        |
| $4i - \sqrt{3}$ |        |        |
| $2021(i+2)$     |        |        |
| $i - 3(4i)$     |        |        |
| $a - i$         |        |        |
| $3 + i$         |        |        |
| $5 - i$         |        |        |
| $-1 + i$        |        |        |



## Karmaşık Sayının Eşleniği

Eşlenik köklü sayılarda da karşımıza çıkan bir kavramdı.

$a \in \mathbb{R}$  olmak üzere,

$Z = a + bi$  sayısının eşleniği  $\bar{Z}$  şeklinde gösterilir.

$\bar{Z} = a - bi$  olur.

Örneğin,  $Z = 3 + i$  sayısının eşleniği  $3 - i$  sayısıdır. Bu sayının eşleniği olduğu durumda  $Z$  nin üstünde bir çizgi ile gösterilir.

Aşağıdaki sayıların eşleniklerini bulunuz.

$5 - i$  :

$12 + 3i$  :

$3i - 4$  :

$b + 3i$  :



## Karmaşık Sayılar Eşlenik Çarpım

$a, b \in \mathbb{R}$  ve  $i^2 = -1$  olmak üzere,

$Z = a + bi$  (  $Z$  Sayısının kendisi)

$\bar{Z} = a - bi$  (  $Z$  sayısının eşleniği)

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - \cancel{a bi} + \cancel{a bi} + b^2$$

Dikkat edilirse ifadede iki kare farkını görmekteyiz. Fakat  $i$  sayısının da karesi alınacağı için o da  $-1$  yapacağından  $a^2 - b^2$  sonucu yerine  $a^2 - (-) b^2 = a^2 + b^2$  elde edilmiş olur.

Karmaşık sayılarda bu işlemler pratikliğe dönüştürülebilir.

Reel ve imajiner kısmın karelerinin toplamı bize sonucu verecektir.

Ezberlemeyin önce birkaç kere yapın bunu sonra pratik diye zaten uygulayacaksınız. Köklü sayılarda bu eşlenik çarpım iki kare farkı şeklinde sonuçlanacaktır.

Karmaşık sayılarda, sayılara genelde favori olarak  $Z$  ve  $W$  olarak harfler atanmaktadır.



# i sayısının Kuvvetleri

$$i^2 = -1$$

Bilgisini kullanarak i sayısının kuvvetlerini ve periyodunu bulunuz.

$$i^1 =$$

$$i^2 =$$

$$i^3 =$$

$$i^4 =$$

$$i^5 =$$

$$i^6 =$$

$$i^7 =$$

$$i^8 =$$

$$i^9 =$$

i SAYISININ PERİYODU :

i Sayısının kuvvetleri eğer 4 den fazlaysa kuvvet 4`e bölünür ve kalan sayı i nin kuvveti şeklinde yazılır ve sonuç bulunur.

Çünkü i sayısı üssü 4 sayıda bir periyodik tekrar etmektedir.

- Payda da köklü sayı bırakmadığımız gibi karmaşık sayı da bırakmamalıyız payda da karmaşık sayı bulunduğunda eşleniği veya (sadece imajineri varsa) kendisiyle çarpılır.

Örneğin  $i^{2022}$  sayısı bizden isteniyorsa 2021`i 4 e böleriz.  $2022 = 4k + 2$  olduğundan  $i^2 = -1$  olacaktır.

Aşağıdaki sayıların eşitlerini yazınız. ( $i^2 = -1$  dir. )

$$i^{1024} =$$

$$i^{464} =$$

$$i^{83} =$$

$$i^0 =$$

$$i^{102} =$$

$$i^{2002} =$$



# Örnek Soru 1

$i^2 = -1$  olmak üzere,

$i^{492} + i^{-101} + i^{46}$  işleminin sonucu kaçtır?

- A) 1                      B) i                      C) 0  
D) -1                      E) -i

i sayısının üssü negatifse :

1) Kural : Üssü pozitif olacak şekilde 4'ün katları eklenir ve elde edilen ifade sonuç olmuş olur.

Örneğin :  $i^{-218}$  -218 pozitif olması için 4k yani 220 eklenirse  $i^2 = -1$  elde edilir. ( $220 - 218 = 2$ )

2) Bu yöntem normal üslü sayılar bilgimizden yapabiliriz. Dikkat etmemiz gereken paydada i bırakmamak.  $i^{-218}$  sayısını  $\frac{1}{i^{218}}$  şeklinde yazabiliriz.  $218 = 4k + 2$  yani  $i^2 = -1$  olacaktır. Payda i olursa i ile çarpılarak i sayısı paya aktarılır.



## Örnek Soru 2

Karmaşık sayılar kümesinde,

$$\frac{(4 - 2i) \cdot (8 + 4i)}{(1 + i\sqrt{3}) \cdot (1 - i\sqrt{3})}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

$$(i^2 = -1)$$

A)  $i$

B) 0

C) 10

D) 11

E) 44



## Örnek Soru 3

Aşağıdaki işlemin sonucu kaçtır? ( $\sqrt{-1} = i$ )

$$(i - 1)^6 \cdot \left(-1 + \frac{-1}{i}\right)^{-6}$$

- A)  $8i$                       B)  $1$                       C)  $-8i$   
D)  $i$                       E)  $-i$



## Örnek Soru 4

b bir gerçel sayı olmak üzere, karmaşık sayılarda

$$\frac{16 + bi}{bi - 4} = 2i \text{ ise } b \text{ kaçtır?}$$

- A) -8                      B) -4                      C) 0  
D) 4                      E) 8



## Örnek Soru 5

Karmaşık sayılarda toplam sembolüyle işlemi yapılıyor.

$$\sum_{n=1}^{98} i^{n!+2}$$

Buna göre, işleminin sonucu kaçtır?

- A) -93                      B)  $-(93 + i)$                       C) -99
- D)  $-(91+i)$                       E)  $91 + i$





## Örnek Soru 6

Karmaşık sayılar kümesinde,

$$\frac{\sqrt{-16} \sqrt{-36}}{\sqrt{-4}} \text{ işleminin sonucu kaçtır?}$$

- A) 4                      B) 8                      C) -4
- D) 12i                      E) 4i

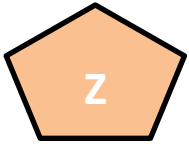


## Örnek Soru 7

$i^2 = -1$  olmak üzere,  $Z$  karmaşık sayısı için aşağıdaki şekillerle işlemler modelleniyor.



$$= \text{Re}(z) + Z$$

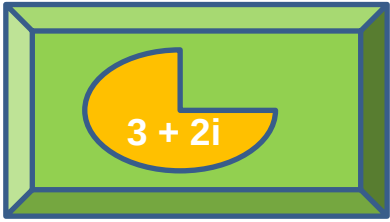


$$= \text{Im}(z) - \bar{Z}$$

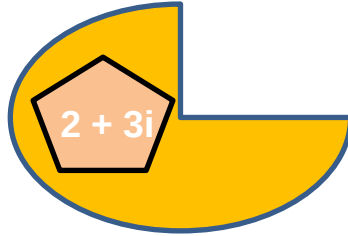


$$= [\text{Im}(z) \cdot \text{Re}(z)]i + Z$$

Verilenlere göre,



–



**İşleminin sonucu kaçtır?**

A)  $2(3-i)$

B)  $5 - 2i$

C)  $1 + i$

D)  $2i + 5$

E)  $71i$



## Örnek Soru 8

Gerçel katsayılı 2.dereceden bir  $P(x)$  polinomunun bilinen kökleri 1- i Polinomun en büyük derecesinin önündeki çarpan 2 olduğuna göre  $P(0) + P(1)$  Kaçtır?

- A) 3                      B)  $2i$                       C) 0  
D) 6                      E) 7



## Örnek Soru 9

$z^2 + 36 = (z-6i) \cdot (1-4i)$  işleminde  $z$  karmaşık sayısının eşiti aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A)  $1 - 10i$

B)  $1 + 2i$

C)  $1+10i$

D)  $6i$

E)  $-6i$



## Örnek Soru 10

Aşağıda bazı önermeler veriliyor.

I. Karmaşık sayılar sebebiyle tek dereceli kökler içerisinde negatif sayılar yazılabilmektedir.

II. Karmaşık sayılar aynı zamanda bir gerçel sayıdır.

III. Tüm reel sayılar bir karmaşık sayıdır.

Verilen önermelerden hangileri daima doğrudur?

- A) I ve II      B) Yalnız III      C) Yalnız I  
D) Hepsi      E) I ve III



## Örnek Soru 11

A ve B gerçel sayılar olmak üzere, karmaşık sayılar kümesinde,

$$i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{144} = A - 5$$

$$i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 + \dots + i^{239} \cdot i^{240} + i^{241} \cdot i^{242} \cdot i^{243} = B^3 + 3$$

eşitlikleri veriliyor. Buna göre  $\left(\frac{A}{B}\right)^2$  kaçtır?

A)  $\frac{25}{16}$

B)  $\frac{144}{81}$

C)  $\frac{121}{49}$

D)  $\frac{64}{36}$

E)  $\frac{25}{9}$



# Çözüm Kümesi

$x^2 + 16 = 0$  denkleminde  $x^2 = -16$  karekök alınırsa

$\sqrt{-16} = x$  olur.  $\sqrt{-1} = i$  olduğuna göre bu denklemi sağlayan kökler  $\{X_1, X_2\}$  ise

$$X_1 = 4i$$

$X_2 = -4i \rightarrow$  Bu kök genelde unutulur 4i karesi alındığında -16 yapacaktır. Başındaki - ise karesi alındığından pozitif dönüşecektir. İşlemde etkisini yitirecektir.

$y = x^2 - 4x + 5$  denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$$x^2 - 4x + 5$$

$$x \rightarrow -2 + i$$

$$x \rightarrow -2 - i$$

Toplamları -4 çarpımları ise 5 sayısını verdi. Çarpanlara ayırmada hatırladığımız üzere yan yana yazıyorduk.

$$(x - 2 + i) \cdot (x - 2 - i) = 0$$

$$-2 + i = 0 \Rightarrow 1. \text{ Kökümüz } 2 - i$$

$$-2 - i = 0 \Rightarrow 2. \text{ Kökümüz } 2 + i \text{ olur.}$$

Çözüm Kümesi  $\{2 - i, 2 + i\}$  şeklinde bulunmuş olunur.

İkinci Denklemlerde Bazı Bilgileri Hatırlayalım

$y = ax^2 + bx + c$  denkleminin kökleri  $X_1$  ve  $X_2$  olsun.

$$X_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$X_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$b^2 - 4ac = \Delta \text{ (Delta)}$$

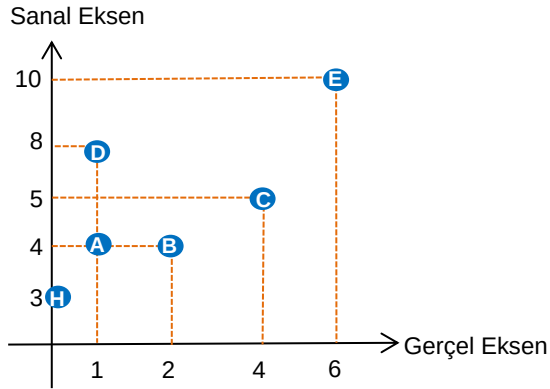
Denkleminin çözüm kümesi  $\{X_1, X_2\}$  olur.

❑ Yukarıda verilen denklemde  $\Delta \geq 0$  ise denklemin kökleri gerçel köklerdir. İmajiner kökler içermez.

❑ Delta  $\Delta < 0$  ise gerçel kök yoktur bu kökler karmaşık sayılarda tanımlı köklerdir. Sebebiyse  $\sqrt{\Delta}$  ifadesinde  $\Delta$  nın negatif olmasından dolayıdır.



# Grafik Uygulamaları



Yukarıda sanal ve gerçel eksenleri bulunan bir grafik verilmiştir. Karmaşık sayılar kümesinde yer alan olan bu sayıların eşitini koordinatlardan yararlanarak yazınız.

Bir adet örnek verilmiştir, diğerlerini yapamazsanız videomuzu izleyebilir veya cevap anahtarından öğrenebilirsiniz.

A :  $1 + 4i$

B :

C :

D :

E :

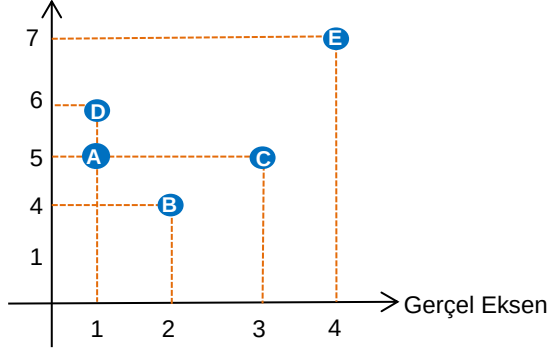
H :





## Örnek Soru 12

Sanal Eksen



Q

Şeklinde modellenen fonksiyonel işleme göre ; karmaşık sayının kendisi ve eşleniği çarpılmaktadır. Buna göre A,B,C,D,E şekilli fonksiyonlarının sonuçları büyükten küçüğe doğru sıralandığında ortadaki değer kaçtır?

A) 29

B) 34

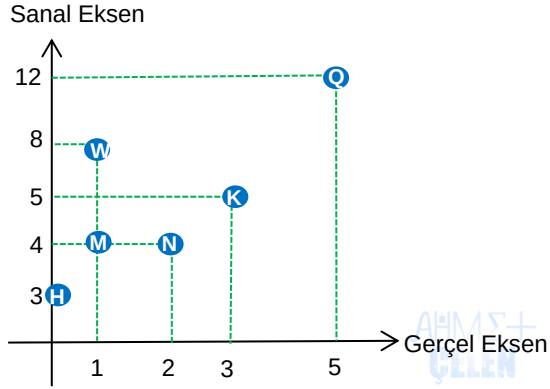
C) 37

D) 20

E) 26



## Örnek Soru 13



Yukarıda sanal ve gerçel eksenlerin bulunduğu karmaşık sayılar kümesinde ki sayılar verilmiştir. Noktalar sayıları temsil ettiğine göre bu sayıların sanal kısmı ile gerçel kısmının mutlak değerce farkı en fazla olan sayılar hangisidir?

- A) Yalnız W      B) Q ve K      C) W ve H  
D) W ve Q      E) Yalnız K



## Örnek Soru 14

$y = x^2 - 6x + 10$  denklemiyle ilgili aşağıdakilerden hangisi yanlış olabilir?

- A) Çözüm Kümesi reel sayılarda boş kümedir.
- B) Eşlenik sanal kökleri vardır.
- C) Denklemin sıfırları karmaşık sayılar kümesindendir.
- D) Denkleminin çözüm kümesi  $\{ 3+i, 3-i \}$  olur.
- E) Çözüm kümesi boş kümedir.

# CEVAP ANAHTARI VE NOTLAR

| Z Sayısı        | Re (Z)      | Im (Z) |
|-----------------|-------------|--------|
| $b + 3i$        | $b$         | $3$    |
| $4$             | $4$         | $0$    |
| $4i - \sqrt{3}$ | $-\sqrt{3}$ | $4$    |
| $2021(i+2)$     | $4042$      | $2021$ |
| $i - 3(4i)$     | $0$         | $-11$  |
| $a - i$         | $a$         | $-1$   |
| $3 + i$         | $3$         | $1$    |
| $5 - i$         | $5$         | $-1$   |
| $-1 + i$        | $-1$        | $+1$   |

Üsler 4 e bölünür ve kalan üs i sayısının kuvvetidir.

$$i^{1024} = 1$$

$$i^{464} = 1$$

$$i^{83} = -i$$

$$i^0 = 1 \text{ (Bir sayının 0.cı kuvveti 1 dir.)}$$

$$i^{102} = -1$$

$$i^{2002} = -1$$

$i^2 = -1$  Bilgisini kullanarak i sayısının kuvvetlerini ve periyodunu bulunuz. Üslü sayılarda tabanlar aynıysa üsleri toplama özelliğini kullanmanızı tavsiye edebilirim.

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = 1$$

$$i^5 = i$$

$$i^6 = -1$$

$$i^7 = -i$$

$$i^8 = 1$$

$$i^9 = i$$

i SAYISININ ÜSSÜNÜN PERİYODU : 4 periyotta bir üssü tekrar eder. Üs 4 e bölünür ve kalan i sayısının kuvvetidir.

$$4k + 1 = i$$

$$4k + 2 = -1$$

$$4k + 3 = -i$$

$$4k + 4 \text{ yani kalansız bölüm} = 1 \text{ yapar.}$$

Grafik koordinat cevapları.

Gerçek eksen gerçek kısmı, imajiner kısımdaki sayıda i sayısı ile çarpılarak imajiner kısmı sembolize etmektedir. İkisinin toplamında bir karmaşık sayı oluşur. Gerçekler kırmızı ile imajinerler mavi ile gösterilmiştir.

$$A : 1 + 4i$$

$$B : 2 + 4i$$

$$C : 4 + 5i$$

$$D : 1 + 8i$$

$$E : 6 + 10i$$

$$H : 0 + 3i$$

Aşağıdaki sayıların eşleniklerini bulunuz. (i nin işaretini değiştir.)

$$5 - i : 5 + i$$

$$12 + 3i : 12 - 3i$$

$$3i - 4 : -3i - 4$$

$$b + 3i : b - 3i$$



1.Video

Test sorularının cevapları sağdadır. Soruların konu anlatımlı video çözümünü dinlemek için QR Kodu okutun.



2.Video

## TESTLERİN CEVAPLARI

1.E  
2.C  
3.B  
4. A  
5.D

6.D  
7. D  
8. D  
9. A  
10.B

11.A  
12. B  
13. D  
14. E