Çemberin Tanımı

Tanım : Düzlemde sabit bir noktaya eş uzaklıkta bulunan noktalar kümesinin oluşturduğu geometri şekle çember adı verilir.

Çember ve Daire arasındaki fark nedir?

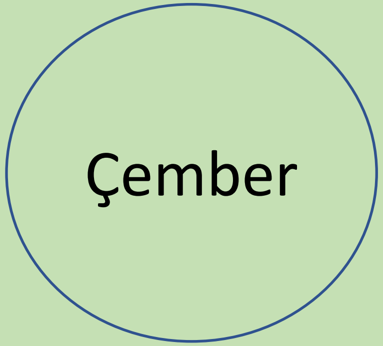
Çember içi boş yuvarlak bir şekildir. İçi boş olduğundan ötürü alanı hesaplanamaz. Dairenin içi dolu olduğundan alanı hesaplanabilir. Çevreleri her ikisi içinde hesaplanabilir. Tek farkları budur.

Yarıçapı r birim olan daire için

Çevre : $2 \cdot \pi \cdot r$
Alan : $\pi \cdot r^2$

$r \in \mathbb{R}^+$

Yarıçapı r birim olan çember için

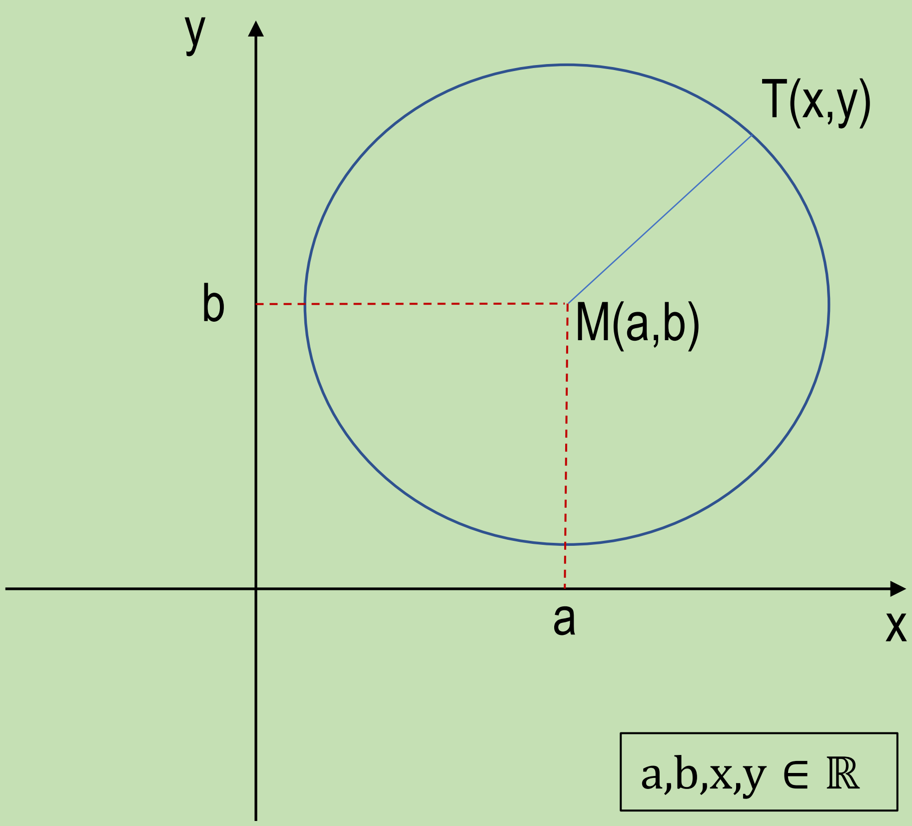


Çevre : $2 \cdot \pi \cdot r$
Alan : İçi boş olduğundan alanı yoktur.

$r \in \mathbb{R}^+$

Çemberin Denkleminin Temeli

Çember denkleminin temeli iki nokta arasındaki uzaklığa dayanmaktadır.



a,b,x,y ∈ ℝ

|MT| = r birimdir yarıçap olduğundan ötürü

İki nokta arasındaki uzaklık formülünden yararlanalım

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$ Kökten kurtarırsak

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Bu denklem çemberin standart denklemidir ilerleyen sayfalarda daha detaylı göreceğiz. Nereden geliyor diye aklınızda soru işareti kalmaması için burda ispatını anlattık. Mantığıyla öğrenilen her şey zihinde daha kalıcı olur ve unutulması zordur.

Ücretsiz Nitelikli Matematik Eğitimi

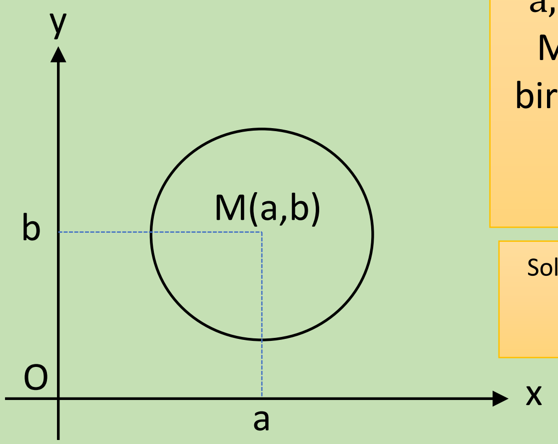
Ahmet ÇELEN

AHMETCELEN.COM.TR – KONU ANLATIMI

youtube.com/ahmetçelen

Çemberin Analitik İncelenmesi

• Çember Denklemi



$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere Merkezi M(a,b) noktası olan yarıçapı r birim olan çemberin denklemini iki nokta arası uzaklığı kullanarak elde edebiliriz.

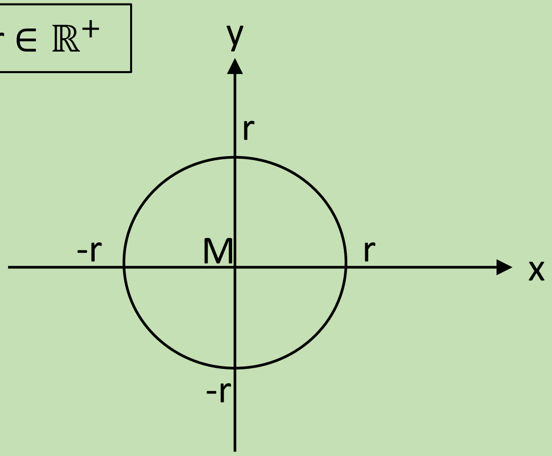
Solda a ve b analitik düzlemde pozitiftir fakat tüm gerçel sayılar sayılar için aşağıdaki denklem geçerlidir.

- Sonuç olarak çember denklemi :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

• Merkezil Çember Denklemi

$r \in \mathbb{R}^+$



Merkezi orijin M (0,0) noktası olan çembere **merkezil çember** denir.

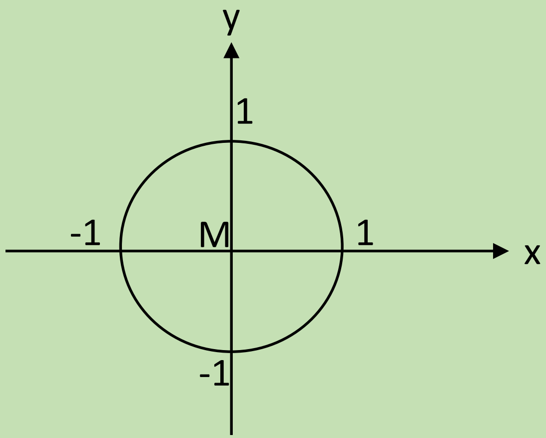
Yandaki bulduğumuz formülde a ve b yerine orijin olduğundan ötürü 0 yazılır ve denklem elde edilir.

- Merkezil çember denklemi :

$$(x)^2 + (y)^2 = r^2$$

Birim Çember Özellikleri

• Birim Çember ve Özellikleri



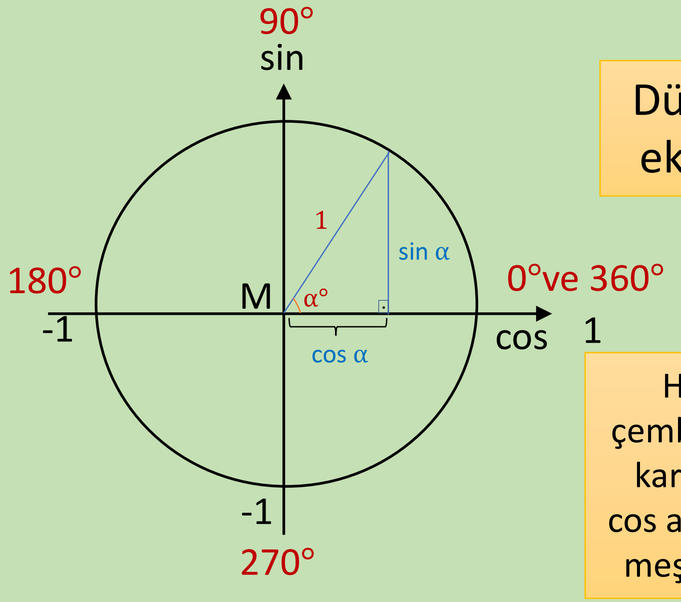
Merkezi orijin M (0,0) noktası olan ve yarıçapı 1 birim olan çembere **birim çember denilir.**

Yarıçapı 1, merkezi orijin (0,0) olduğundan aşağıdaki ifade birim çember denklemidir.

• Birim Çemberin Denklemi

$$x^2 + y^2 = 1$$

• Trigonometri ilişkisi



Düşey eksen sinüs, yatay eksen cosinüs eksenidir.

Hipotenüs yarıçap ve birim çember olduğundan 1 olduğu için karşı kenar sin a , komşu kenar cos a olur ve Pisagor teoreminden meşhur denklemimiz elde edilir.

• Meşhur denklemimiz

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

Çember Belirtme Durumları

$$(x^2 + Dx + Ey + y^2 + F) = 0$$

$$\text{Yarıçap} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}\right)$$

$D, E, F \in \mathbb{R}$ olmak üzere, çift dereceli kökün içerisindeki ifadeye dikkat etmemiz gerekmektedir. Yarıçap uzunluğu ve kök içerisindeki ifadeden yorum yapabiliriz. ½ ile çarpılması Sadece boyutu değiştirir dolayısıyla bizim odak Noktamız kök içerisindeki ifadeden gelen eşitliktir. Bu eşitlik 3 farklı şekilde incelenir ve üç durumda bizlere farklı geometri şekiller elde etmemizi sağlar.

r > 0 ise çember belirtir

- Yarıçap uzunluğu pozitif olacaktır. Zaten uzunluklar pozitif olur.
- Yarıçapı pozitif olması bu ifadenin bir çember belirteceği anlamına gelir.

r = 0 ise nokta belirtir

- Düzlemde sabit bir noktaya eş uzaklıkta bulunan noktaların kümesinin oluşturduğu geometri şekle çember adı verilir.
- Yarıçap uzunluğu olmadığından nokta belirtir.

r < 0 ise sanal çember belirtir

- Kareköklü bir ifadenin içerisinde negatif sayının olması ifadenin bir karmaşık sayıya eş olduğu anlamına gelir. Karmaşık sayılarda imajiner kısım sanal olarak nitelendirilir böylelikle sanal çember belirtir. Hatırlayalım ;
- $\sqrt{-1} = i$ kare alırsak $i^2 = -1$

Çemberde Eşitlikler

$$(x^2 + Dx + Ey + y^2 + F) = 0$$

Yarıçap = $\left(\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}\right)$

$D, E, F, a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere Merkezi M(a,b) noktası olan çemberde soldaki bağıntılardan merkezin koordinatları bulunabilir.

a = $\frac{-D}{2}$, b = $\frac{-E}{2}$

- x li terimin katsayısının yarısının – ile çarpılmış hali merkezin apsisini, benzer şekilde y li terimin katsayısının yarısının – ile çarpılmış hali merkezin ordinatını verir.

Örnek Soru

$(x^2 + 18x + 4y + y^2 + 16) = 0$

Yukarıdaki ifade bir çember belirtmektedir. Buna göre, bu çemberin merkezinin koordinatlarını bulunuz. (Önce siz uğraşın.)

Çözüm

$(x^2 + 18x + 4y + y^2 + 16) = 0$

Bu formattaki bir çember denkleminde yanda belirttiğimiz üzere apsis x li terimin yarısının – ile çarpılmışı, ordinatta aynı şekilde bulunur.

Apsis için = 18x li ifadeyi yarıya bölüp – ile çarparız.

-18/2 = -9

Ordinat için = 4y li ifadeyi yarıya bölüp – ile çarparız.

-4/2 = -2

Çemberin merkez koordinatları (-9,-2) şeklindedir.

Çember Belirtme Şartları

$$(x^2 + Dx + Ey + y^2 + F) = 0$$

Yarıçap = $\left(\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}\right)$

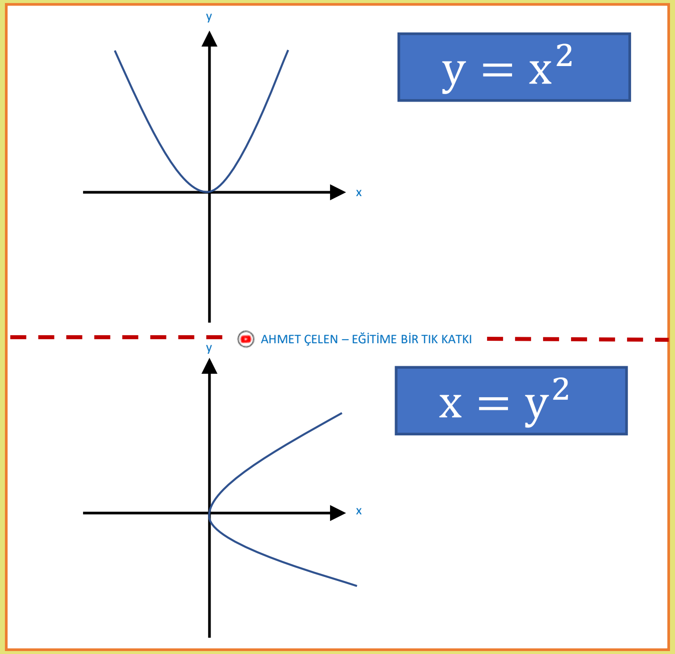
$D, E, F \in \mathbb{R}$ olmak üzere, yanda çemberin açık denklemi (kare açılımları yapılmış) hali verilmiştir. İfadenin bu şekilde bir çember belirtmesi için bazı şartlar vardır, bu şartlar yerine Gelmediği müddetçe ifade çember belirtmez ve kötü bir durum olarak değerlendirebiliriz ki ifade çember denklemi gibi gözükür gözümüze.

x.y terim olmamalı

- İfadede x.y li terim olmaması gerekir olduğu takdirde ifade çember belirtmeyecektir.
- Olması halinde farklı bir eğri belirtecektir, en basitinden y= x^2 parabolünü x ile çarpsak çok farklı bir eğri elde etmiş oluruz.

x^2 ve y^2 ifadelerin katsayıları eşit olmalıdır

- Katsayılar eşit olmadığı takdirde ifade orantısız bir çember tarzı geometri şekil belirtebilir ve bu şekilde yarıçap merkezden her noktaya **eş uzaklıkta** olmayacaktır.
- Çemberin tanımı, düzlemde sabit bir noktaya **eş uzaklıkta** noktaların oluşturduğu kümedir.



Örnek Sorular

Merkezi (3,-4) yarıçapı 5 birim uzunluğunda çemberin denklemini bulunuz.

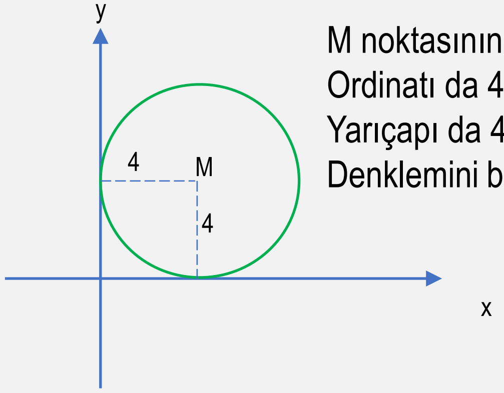
Hatırlatma : Merkezi (a,b) yarıçapı r birim olan çemberin denklemi $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ uygun koşullarda yukardaki gibidir.

O halde $(x-3)^2+\left(y-(-4)\right)^2=5^2$

Son Hali : $(x-3)^2+(y+4)^2=25$

Yukarıya bakmadan aşağıdaki alana çözümlemeyi deneyebilirsiniz.

Analitik düzlemde 1.bölgede yarıçapı 4 birim olan ve her iki eksene de teğet olan çemberin denklemini bulunuz.

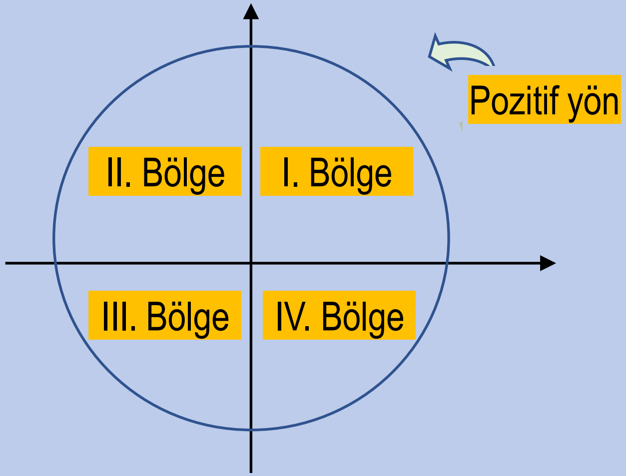


M noktasının apsisi 4, Ordinatı da 4 birimdir. Yarıçapı da 4 olduğundan Denklemini bulabiliriz.

$$(x-4)^2+(y-4)^2=16$$

Trigonometri konusunda fonksiyonların bölge bölge işaret incelenmesini çoğu öğrenci ezbere yöneltilmekte veya yönelmektedir. Y ekseni sinüs, x ekseni cosinüs olarak değerlendirildiğinde y ekseninin üstü pozitif kısımdır ve böylelikle I. ve II.bölgelerde sinüs pozit altta kalanlarda III. ve IV. Bölgelerde negatiftir. X ekseni de aynı şekilde orijinden sonra sağa doğru gidildikçe pozitftir I. ve IV.bölge pozitif sol taraf II.ve III. Temaslı bölgeler negatif değerlik alır.

Yandaki sorunun çözümü için analitik düzlemi hatırlayalım.



Saat yönün tersi yöne pozitif yön denilir. Saat yönünün tersinde ilerlenilerek sırasıyla bölgeler numaralandırılır.

Trigonometri ile bölgelerin ilişkilerini hatırlamakta fayda var. Buraya sığmayacağından sol tarafa hatırlamamızı yaptık ezbersiz öğrenmenizi sağlamaya çalışıyoruz.

www.ahmetcelen.com.tr

Çemberin Analitiği ve Sınavdaki Yeri

Kaçınsı sınıf konusudur?

Çemberin analitik incelenmesi 12.sınıfın II.dönem son konularından bir tanesidir. Lise matematik adına güncel müfredatta geometri için işlenilen en son konudur.

AYT mi TYT mi konusudur?

11.Sınıf ve 12.sınıf konuları AYT (Alan Yeterlilik Testi) , 9. ve 10.sınıf konuları ise TYT (Temel Yeterlilik Testi) Konusudur. İstisnalar olabilmekte ve ortak olarak bazı konular her iki sınavda da yer alabilmektedir. Çemberin analitiği 12.sınıf konusudur ve alan bilgisi gerektirdiğinden AYT sınavına dahildir. TYT sınavında çemberin analitiği sorusu müfredat göze alındığında sorulamaz.

İlişkili Konular Nelerdir?

Analitik Geometri ve Üçgenler : Üçgenler geometrinin her konusuyla neredeyse ilişkilidir. Analitik geometri ise çok pratiklik isteyen ve son yıllarda AYT sınavında bir hayli önemini koruduğu hatta fazlasıyla soru geldiğini görebiliyoruz.

İntegral: Çember denklemiyle integral harmanlanarak AYT kıvamına uygun son derecede güzel sorular sentelenebilmektedir. Müfredat olarakta çok ilişkili soru kalıplarının gelebileceğini söyleyebiliriz.

Karmaşık Sayılar: Kök içerisindeki yarıçap denklemindeki sayı negatif gelirse yarıçapı karmaşık uzunluğa sahip bir sanal çember çıkacaktır fakat müfredat olarak sadece bu durum yorumlatılmaktadır.